論理回路入門（4）

論理回路基礎４：論理式の積和形と和積形

李　亜民

2024 年 10 月 15 日 (火)

論理式の積和 (加法) 形と和積 (乗法) 形

ポイント

- 最小項
- 最大項
- 最小項の論理和＝積和標準形＝加法標準形
- 最大項の論理積＝和積標準形＝乗法標準形
- 論理式の積和形
- 論理式の和積形
- 積和形から和積形に変形
- 和積形から積和形に変形

復習: ブール代数の定理

1. $A \cdot A = A$ ……………………… 冪等律
2. $A + A = A$ ……………………… 冪等律
3. $A \cdot B = B \cdot A$ ……………………… 交換律
4. $A + B = B + A$ ……………………… 交換律
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ……………… 結合律
6. $(A + B) + C = A + (B + C)$ ……………… 結合律
7. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ ………… 分配律
8. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ ………… 分配律
9. $A \cdot (A + B) = A$ ……………………… 吸収律
10. $A + (A \cdot B) = A$ ……………………… 吸収律

復習: ブール代数の定理

11. $A \cdot 0 = 0$ ……………………… 支配律
12. $A + 1 = 1$ ……………………… 支配律
13. $A \cdot 1 = A$ ……………………… 同一律
14. $A + 0 = A$ ……………………… 同一律
15. $A \cdot \overline{A} = 0$ ……………………… 補元律
16. $A + \overline{A} = 1$ ……………………… 補元律
17. $\overline{\overline{A}} = A$ ……………………… 対合律

18. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ……………… ド・モルガンの法則
19. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ……………… ド・モルガンの法則

最小項

最小項: ある真理値表が与えられた時、すべての変数を 1 回ずつ含み、出力が 1 となる組み合わせ (論理積で示し、それぞれの変数が 0 のとき、バーをつける)。$1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$

X	Y	Z	F	最小項	
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	1	$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
0	1	1	0		
1	0	0	1	$X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	
1	0	1	1	$X \cdot \overline{Y} \cdot Z$	
1	1	0	1	$X \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
1	1	1	1	$X \cdot Y \cdot Z$	

$F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$ 　最小項の論理和

最大項

最大項: ある真理値表が与えられた時、すべての変数を 1 回ずつ含み、出力が 0 となる組み合わせ (論理和で示し、それぞれの変数が 1 のとき、バーをつける)。$0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

X	Y	Z	F	最小項	最大項
0	0	0	0		$X + Y + Z$
0	0	1	0		$X + Y + \overline{Z}$
0	1	0	1	$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
0	1	1	0		$X + \overline{Y} + \overline{Z}$
1	0	0	1	$X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$	
1	0	1	1	$X \cdot \overline{Y} \cdot Z$	
1	1	0	1	$X \cdot Y \cdot \overline{Z}$	
1	1	1	1	$X \cdot Y \cdot Z$	

$F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$ 最大項の論理積

最小項の論理和と最大項の論理積

- 最小項の論理和
  ある真理値表が与えられた時、結果が 1 となる変数の値 0, 1 のそれぞれの組み合わせについて、その値が 1 の時はそのまま、0 の時はその変数を NOT し、すべての変数の AND をとった項を OR で結ぶことで、論理関数を求めることができる。
  $F = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$
- 最大項の論理積
  ある真理値表が与えられた時、結果が 0 となる変数の値 0, 1 のそれぞれの組み合わせについて、その値が 0 の時はそのまま、1 の時はその変数を NOT し、すべての変数の OR をとった項を AND で結ぶことで、論理関数を求めることができる。
  $F = (X + Y + Z)(X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})$

最小項の論理和と最大項の論理積

- 最大項の論理積
  ある真理値表が与えられた時、結果が 0 となる変数の値 0, 1 のそれぞれの組み合わせについて、その値が 0 の時はそのまま、1 の時はその変数を NOT し、すべての変数の OR をとった項を AND で結ぶことで、論理関数を求めることができる。
  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 最小項の論理和
  ある真理値表が与えられた時、結果が 1 となる変数の値 0, 1 のそれぞれの組み合わせについて、その値が 1 の時はそのまま、0 の時はその変数を NOT し、すべての変数の AND をとった項を OR で結ぶことで、論理関数を求めることができる。
  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$

最小項の論理和と最大項の論理積

X	Y	Z	F	$\overline{F}$	F の最小項	$\overline{F}$ の最小項	F の最大項
0	0	0	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X+Y+Z$
0	0	1	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	$X+Y+\overline{Z}$
0	1	0	1	0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$		
0	1	1	0	1		$\overline{X}\,Y\,Z$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$
1	0	0	1	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$		
1	0	1	1	0	$X\,\overline{Y}\,Z$		
1	1	0	1	0	$X\,Y\,\overline{Z}$		
1	1	1	1	0	$X\,Y\,Z$		

$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z$ .... $\overline{F}$ の最小項の論理和

最小項の論理和と最大項の論理積

X	Y	Z	F	$\overline{F}$	F の最小項	$\overline{F}$ の最小項	F の最大項
0	0	0	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X+Y+Z$
0	0	1	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	$X+Y+\overline{Z}$
0	1	0	1	0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$		
0	1	1	0	1		$\overline{X}\,Y\,Z$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$
1	0	0	1	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$		
1	0	1	1	0	$X\,\overline{Y}\,Z$		
1	1	0	1	0	$X\,Y\,\overline{Z}$		
1	1	1	1	0	$X\,Y\,Z$		

$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z$ …………………… $\overline{F}$ の最小項の論理和

$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z}\downarrow$ ド・モルガンの法則 ($\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$)

最小項の論理和と最大項の論理積

X	Y	Z	F	$\overline{F}$	F の最小項	$\overline{F}$ の最小項	F の最大項
0	0	0	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X+Y+Z$
0	0	1	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	$X+Y+\overline{Z}$
0	1	0	1	0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$		
0	1	1	0	1		$\overline{X}\,Y\,Z$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$
1	0	0	1	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$		
1	0	1	1	0	$X\,\overline{Y}\,Z$		
1	1	0	1	0	$X\,Y\,\overline{Z}$		
1	1	1	1	0	$X\,Y\,Z$		

$\overline{F}=\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}\,Z+\overline{X}\,Y\,Z$ ……………………$\overline{F}$ の最小項の論理和

$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}\,Z+\overline{X}\,Y\,Z}$ $\downarrow$ ド・モルガンの法則 ($\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$)

$=(\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}})\,(\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,Z})\,(\overline{\overline{X}\,Y\,Z})$ $\downarrow$ ド・モルガンの法則 ($\overline{A\,B}=\overline{A}+\overline{B}$)

最小項の論理和と最大項の論理積

X	Y	Z	F	$\overline{F}$	F の最小項	$\overline{F}$ の最小項	F の最大項
0	0	0	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X+Y+Z$
0	0	1	0	1		$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$	$X+Y+\overline{Z}$
0	1	0	1	0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$		
0	1	1	0	1		$\overline{X}\,Y\,Z$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$
1	0	0	1	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$		
1	0	1	1	0	$X\,\overline{Y}\,Z$		
1	1	0	1	0	$X\,Y\,\overline{Z}$		
1	1	1	1	0	$X\,Y\,Z$		

$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z$ ……………………$\overline{F}$ の最小項の論理和

$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}\,Y\,Z}$ ↓ ド・モルガンの法則 $(\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B})$

$= (\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}})\,(\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,Z})\,(\overline{\overline{X}\,Y\,Z})$ ↓ ド・モルガンの法則 $(\overline{A\,B} = \overline{A} + \overline{B})$

$= (X+Y+Z)\,(X+Y+\overline{Z})\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ ………F の最大項の論理積

最小項の論理和＝最大項の論理積

$F = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$ 　最小項の論理和

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$F = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$ 最小項の論理和

$= \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ + XY\overline{Z}$ 冪等律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$ 最小項の論理和

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ + XY\overline{Z}$$ 冪等律

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}Z + Y\overline{Z} + YZ) + XY\overline{Z}$$ 分配律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z \qquad \text{最小項の論理和}$$

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z + X\,Y\,\overline{Z} \qquad \text{冪等律}$$

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z + Y\,\overline{Z} + Y\,Z) + X\,Y\,\overline{Z} \qquad \text{分配律}$$

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,(\overline{Z} + Z) + Y\,(\overline{Z} + Z)) + X\,Y\,\overline{Z} \qquad \text{分配律}$$

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$ 最小項の論理和

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ + XY\overline{Z}$$ 冪等律

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}Z + Y\overline{Z} + YZ) + XY\overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X(\overline{Y}(\overline{Z} + Z) + Y(\overline{Z} + Z)) + XY\overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X}Y\overline{Z} + X(\overline{Y} + Y) + XY\overline{Z}$$ 補元律、同一律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = \overline{X} Y \overline{Z} + X \overline{Y} \overline{Z} + X \overline{Y} Z + X Y \overline{Z} + X Y Z$$ 最小項の論理和

$$= \overline{X} Y \overline{Z} + X \overline{Y} \overline{Z} + X \overline{Y} Z + X Y \overline{Z} + X Y Z + X Y \overline{Z}$$ 冪等律

$$= \overline{X} Y \overline{Z} + X (\overline{Y} \overline{Z} + \overline{Y} Z + Y \overline{Z} + Y Z) + X Y \overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X} Y \overline{Z} + X (\overline{Y} (\overline{Z} + Z) + Y (\overline{Z} + Z)) + X Y \overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X} Y \overline{Z} + X (\overline{Y} + Y) + X Y \overline{Z}$$ 補元律、同一律

$$= \overline{X} Y \overline{Z} + X + X Y \overline{Z}$$ 補元律、同一律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z && \text{最小項の論理和} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z + X\,Y\,\overline{Z} && \text{冪等律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z + Y\,\overline{Z} + Y\,Z) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{分配律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,(\overline{Z} + Z) + Y\,(\overline{Z} + Z)) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{分配律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y} + Y) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X + X\,Y\,\overline{Z} && \text{補元律、同一律} \\
&= X + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,\overline{Z} && \text{交換律}
\end{aligned}
$$

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$$ 最小項の論理和

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z + X\,Y\,\overline{Z}$$ 冪等律

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z + Y\,\overline{Z} + Y\,Z) + X\,Y\,\overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,(\overline{Z} + Z) + Y\,(\overline{Z} + Z)) + X\,Y\,\overline{Z}$$ 分配律

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y} + Y) + X\,Y\,\overline{Z}$$ 補元律、同一律

$$= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X + X\,Y\,\overline{Z}$$ 補元律、同一律

$$= X + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,\overline{Z}$$ 交換律

$$= X + (\overline{X} + X)\,Y\,\overline{Z}$$ 分配律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z && \text{最小項の論理和} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z + X\,Y\,\overline{Z} && \text{冪等律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}\,Z + Y\,\overline{Z} + Y\,Z) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{分配律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y}\,(\overline{Z} + Z) + Y\,(\overline{Z} + Z)) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{分配律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,(\overline{Y} + Y) + X\,Y\,\overline{Z} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X + X\,Y\,\overline{Z} && \text{補元律、同一律} \\
&= X + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,\overline{Z} && \text{交換律} \\
&= X + (\overline{X} + X)\,Y\,\overline{Z} && \text{分配律} \\
&= \boxed{X + Y\,\overline{Z}} && \text{補元律、同一律}
\end{aligned}
$$

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$　　最大項の論理積

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$ 最大項の論理積

$= (X\,X + X\,Y + X\,\overline{Z} +$ 分配律

$Y\,X + Y\,Y + Y\,\overline{Z} +$ 分配律

$Z\,X + Z\,Y + Z\,\overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$ 分配律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$$F = (X+Y+Z)\,(X+Y+\overline{Z})\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$$ 最大項の論理積

$$= (X\,X + X\,Y + X\,\overline{Z} +$$ 分配律

$$Y\,X + Y\,Y + Y\,\overline{Z} +$$ 分配律

$$Z\,X + Z\,Y + Z\,\overline{Z})\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$$ 分配律

$$= (X+Y)\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$$ 冪等律、吸収律、補元律

最小項の論理和＝最大項の論理積

$F = (X+Y+Z)\,(X+Y+\overline{Z})\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 最大項の論理積

$= (X\,X + X\,Y + X\,\overline{Z} +$ 分配律

$Y\,X + Y\,Y + Y\,\overline{Z} +$ 分配律

$Z\,X + Z\,Y + Z\,\overline{Z})\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 分配律

$= (X+Y)\,(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 冪等律、吸収律、補元律

$= X\,X + X\,\overline{Y} + X\,\overline{Z} +$ 分配律

$Y\,X + Y\,\overline{Y} + Y\,\overline{Z}$ 分配律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$　最大項の論理積

$= (X\,X + X\,Y + X\,\overline{Z} +$　分配律

$Y\,X + Y\,Y + Y\,\overline{Z} +$　分配律

$Z\,X + Z\,Y + Z\,\overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$　分配律

$= (X + Y)\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$　冪等律、吸収律、補元律

$= X\,X + X\,\overline{Y} + X\,\overline{Z} +$　分配律

$Y\,X + Y\,\overline{Y} + Y\,\overline{Z}$　分配律

$= \boxed{X + Y\,\overline{Z}}$　冪等律、吸収律、補元律

最小項の論理和 = 最大項の論理積

$F = (X+Y+Z)(X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 最大項の論理積

$= (XX+XY+X\overline{Z}+$ 分配律

$YX+YY+Y\overline{Z}+$ 分配律

$ZX+ZY+Z\overline{Z})(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 分配律

$= (X+Y)(X+\overline{Y}+\overline{Z})$ 冪等律、吸収律、補元律

$= XX+X\overline{Y}+X\overline{Z}+$ 分配律

$YX+Y\overline{Y}+Y\overline{Z}$ 分配律

$= X+Y\overline{Z}$ 冪等律、吸収律、補元律

$= \overline{X}Y\overline{Z}+X\overline{Y}\overline{Z}+X\overline{Y}Z+XY\overline{Z}+XYZ$ 最小項の論理和

論理和論理積の回路 (Verilog HDL)

```
`timescale 1ns/1ns

module sum_prod_ex1 (X, Y, Z, FSUM, FPRO);
    input  X, Y, Z;
    output FSUM, FPRO;
```

// $FSUM = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$ (最小項の論理和)

```
    assign FSUM = ~X &  Y & ~Z |
                   X & ~Y & ~Z |
                   X & ~Y &  Z |
                   X &  Y & ~Z |
                   X &  Y &  Z;   // sum of products
```

// $FPRO = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$ (最大項の論理積)

```
    assign FPRO = (X |  Y |  Z) &
                  (X |  Y | ~Z) &
                  (X | ~Y | ~Z);  // product of sums

endmodule
```

sum_prod_ex1.v

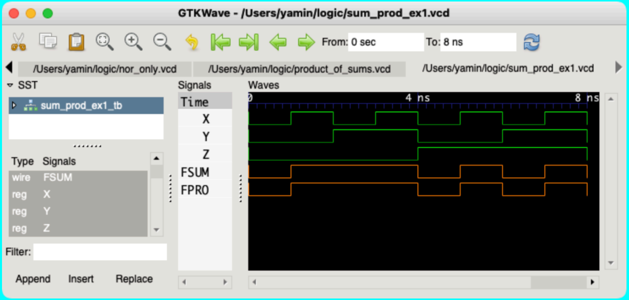
論理和論理積の回路 (テストベンチ)

```
`timescale 1ns/1ns
module sum_prod_ex1_tb;
    reg  X, Y, Z;
    wire FSUM, FPRO;
    sum_prod_ex1 i0 (X, Y, Z, FSUM, FPRO);
    initial begin
        #0 X = 0; Y = 0; Z = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 X = ~X;
    always #2 Y = ~Y;
    always #4 Z = ~Z;
    initial begin
        $dumpfile ("sum_prod_ex1.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

sum_prod_ex1_tb.v

論理和論理積の回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o sum_prod_ex1 \
  sum_prod_ex1_tb.v sum_prod_ex1.v
% vvp sum_prod_ex1
% gtkwave sum_prod_ex1.vcd
```



FPRO (最大項の論理積) === FSUM (最小項の論理和)

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形

  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形
  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形
  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形
  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形
  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 積和形 ＝ 加法形 ＝ 簡単化された積和標準形
  $F = X + Y\,\overline{Z}$ ························· 積和形（加法形）

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形

  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形

  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 積和形 ＝ 加法形 ＝ 簡単化された積和標準形

  $F = X + Y\,\overline{Z}$ ……………………………積和形（加法形）
- 和積形 ＝ 乗法形 ＝ 簡単化された和積標準形

  $\overline{F} = \overline{X + Y\,\overline{Z}} = \overline{X}\,(\overline{Y\,\overline{Z}}) = \overline{X}\,(\overline{Y} + Z) = \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z$

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形

  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形

  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 積和形 ＝ 加法形 ＝ 簡単化された積和標準形

  $F = X + Y\,\overline{Z}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形（加法形）
- 和積形 ＝ 乗法形 ＝ 簡単化された和積標準形

$$\overline{F} = \overline{X + Y\,\overline{Z}} = \overline{X}\,(\overline{Y\,\overline{Z}}) = \overline{X}\,(\overline{Y} + Z) = \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z}$$

↑ド・モルガンの法則、分配律

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形
  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形
  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 積和形 ＝ 加法形 ＝ 簡単化された積和標準形
  $F = X + Y\,\overline{Z}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形（加法形）
- 和積形 ＝ 乗法形 ＝ 簡単化された和積標準形

$$\overline{F} = \overline{X + Y\,\overline{Z}} = \overline{X}\,(\overline{Y\,\overline{Z}}) = \overline{X}\,(\overline{Y} + Z) = \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z}$$ ↑ド・モルガンの法則、分配律

$$= (\overline{\overline{X}\,\overline{Y}})\,(\overline{\overline{X}\,Z})$$ ←↓ド・モルガンの法則

論理式の積和形と和積形

- 最小項の論理和 ＝ 積和標準形 ＝ 加法標準形

  $F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + X\,\overline{Y}\,Z + X\,Y\,\overline{Z} + X\,Y\,Z$
- 最大項の論理積 ＝ 和積標準形 ＝ 乗法標準形

  $F = (X + Y + Z)\,(X + Y + \overline{Z})\,(X + \overline{Y} + \overline{Z})$
- 積和形 ＝ 加法形 ＝ 簡単化された積和標準形

  $F = X + Y\,\overline{Z}$ ……………………………積和形（加法形）
- 和積形 ＝ 乗法形 ＝ 簡単化された和積標準形

$$\overline{F} = \overline{X + Y\,\overline{Z}} = \overline{X}\,(\overline{Y\,\overline{Z}}) = \overline{X}\,(\overline{Y} + Z) = \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z$$

$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y} + \overline{X}\,Z}$ ↑ド・モルガンの法則、分配律

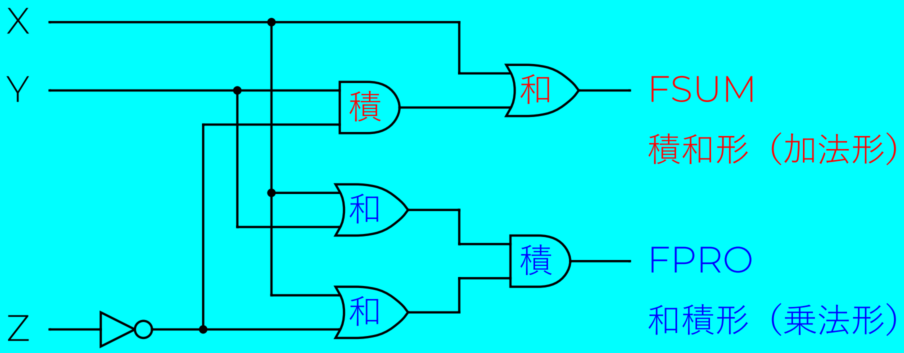
$= (\overline{\overline{X}\,\overline{Y}})\,(\overline{\overline{X}\,Z})$ ←↓ド・モルガンの法則

$= (X + Y)\,(X + \overline{Z})$ ……………………………和積形（乗法形）

論理式の積和形と和積形

$\mathrm{FSUM} = X + Y\,\overline{Z}$　積和形（加法形）

$\mathrm{FPRO} = (X + Y)\,(X + \overline{Z})$　和積形（乗法形）



積和形と和積形の回路 (Verilog HDL)

$\mathrm{FSUM} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\,\overline{\mathrm{Z}}$ 積和形（加法形）

$\mathrm{FPRO} = (\mathrm{X} + \mathrm{Y})\,(\mathrm{X} + \overline{\mathrm{Z}})$ 和積形（乗法形）

```
`timescale 1ns/1ns

module sum_prod_ex2 (X, Y, Z, FSUM, FPRO);
    input  X, Y, Z;
    output FSUM, FPRO;

    assign FSUM = X | Y & ~Z; // sum of products

    assign FPRO = ( X |  Y) &
                  ( X | ~Z);  // product of sums
endmodule
```

sum_prod_ex2.v

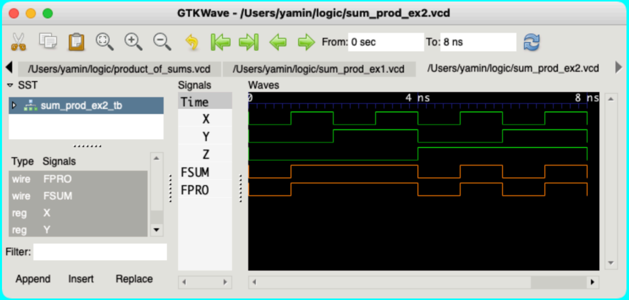
積和形と和積形の回路 (テストベンチ)

```
`timescale 1ns/1ns
module sum_prod_ex2_tb;
    reg  X, Y, Z;
    wire FSUM, FPRO;
    sum_prod_ex2 i0 (X, Y, Z, FSUM, FPRO);
    initial begin
        #0 X = 0; Y = 0; Z = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 X = ~X;
    always #2 Y = ~Y;
    always #4 Z = ~Z;
    initial begin
        $dumpfile ("sum_prod_ex2.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

sum_prod_ex2_tb.v

積和形と和積形の回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o sum_prod_ex2 \
  sum_prod_ex2_tb.v sum_prod_ex2.v
% vvp sum_prod_ex2
% gtkwave sum_prod_ex2.vcd
```



FPRO (和積形) === FSUM (積和形)

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………………… 積和形

積和形から和積形に変形する

$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}\,\mathrm{C} + \overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}$ ……………………………… 積和形

$\overline{\mathrm{F}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}\,\mathrm{C} + \overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}}$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\ &= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}})\end{aligned}$$

ド・モルガンの法則

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則}
\end{aligned}
$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律}
\end{aligned}$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………… 積和形

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律}
\end{aligned}
$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………………… 積和形

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C && \text{分配律}
\end{aligned}$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………………… 積和形

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,B && \text{補元律、同一律}
\end{aligned}
$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……… 積和形

$\overline{F} = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}}$

$= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}})$ ド・モルガンの法則

$= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C)$ ド・モルガンの法則

$= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C)$ 分配律

$= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C)$ 補元律、同一律

$= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C$ 分配律

$= A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,B$ 補元律、同一律

$= A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + B\,\overline{C}$ 交換律、冪等律

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ .... 積和形

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,B && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + B\,\overline{C} && \text{交換律、冪等律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + B\,\overline{C} \quad \leftarrow \text{簡単化された } \overline{F} \text{ の論理式} && \text{吸収律}
\end{aligned}
$$

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………… 積和形

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,B && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + B\,\overline{C} && \text{交換律、冪等律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + B\,\overline{C} \quad \leftarrow \text{簡単化された } \overline{F} \text{ の論理式} && \text{吸収律}
\end{aligned}
$$

$$
F = \overline{\overline{F}} = \overline{A\,\overline{B}\,C + B\,\overline{C}} \quad \leftarrow \overline{\text{簡単化された } \overline{F} \text{ の論理式}} \qquad \text{対合律}
$$

積和形から和積形に変形する

$F = \bar{A}\,\bar{B} + B\,C + \bar{B}\,\bar{C}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・積和形

$\bar{F} = \overline{\bar{A}\,\bar{B} + B\,C + \bar{B}\,\bar{C}}$	
$= (\overline{\bar{A}\,\bar{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\bar{B}\,\bar{C}})$	ド・モルガンの法則
$= (A + B)\,(\bar{B} + \bar{C})\,(B + C)$	ド・モルガンの法則
$= (A\,\bar{B} + A\,\bar{C} + B\,\bar{B} + B\,\bar{C})\,(B + C)$	分配律
$= (A\,\bar{B} + A\,\bar{C} + B\,\bar{C})\,(B + C)$	補元律、同一律
$= A\,\bar{B}\,B + A\,\bar{B}\,C + A\,\bar{C}\,B + A\,\bar{C}\,C + B\,\bar{C}\,B + B\,\bar{C}\,C$	分配律
$= A\,\bar{B}\,C + A\,\bar{C}\,B + B\,\bar{C}\,B$	補元律、同一律
$= A\,\bar{B}\,C + A\,B\,\bar{C} + B\,\bar{C}$	交換律、冪等律
$= A\,\bar{B}\,C + B\,\bar{C}$ ← 簡単化された $\bar{F}$ の論理式	吸収律

$F = \bar{\bar{F}} = \overline{A\,\bar{B}\,C + B\,\bar{C}}$ ← $\overline{\text{簡単化された } \bar{F} \text{ の論理式}}$	対合律
$= (\overline{A\,\bar{B}\,C})\,(\overline{B\,\bar{C}})$	←↓ド・モルガンの法則

積和形から和積形に変形する

$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ ……………………………積和形

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}} \\
&= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})\,(\overline{B\,C})\,(\overline{\overline{B}\,\overline{C}}) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A + B)\,(\overline{B} + \overline{C})\,(B + C) && \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{B} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{分配律} \\
&= (A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + B\,\overline{C})\,(B + C) && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,B + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + A\,\overline{C}\,C + B\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{C}\,B + B\,\overline{C}\,B && \text{補元律、同一律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + B\,\overline{C} && \text{交換律、冪等律} \\
&= A\,\overline{B}\,C + B\,\overline{C} \quad \leftarrow \text{簡単化された } \overline{F} \text{ の論理式} && \text{吸収律}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \overline{\overline{F}} = \overline{A\,\overline{B}\,C + B\,\overline{C}} \quad \leftarrow \overline{\text{簡単化された } \overline{F} \text{ の論理式}} && \text{対合律} \\
&= (\overline{A\,\overline{B}\,C})\,(\overline{B\,\overline{C}}) && \leftarrow\downarrow \text{ド・モルガンの法則} \\
&= (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C) && \text{……和積形}
\end{aligned}$$

和積形から積和形に変形する

$\mathrm{F} = (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}})\ (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C})$ ………………………………和積形

和積形から積和形に変形する

$$F = (\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{B} + C) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{和積形}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C \qquad \text{分配律}$$

和積形から積和形に変形する

$F = (\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{B} + C)$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 和積形

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C$ 分配律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B}$ 補元律、同一律

和積形から積和形に変形する

$F = (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C)$ ······························ 和積形

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C$ 分配律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B}$ 補元律、同一律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ 交換律

和積形から積和形に変形する

$$F = (\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{B} + C) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{和積形}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C \qquad \text{分配律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} \qquad \text{補元律、同一律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{交換律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C\,(\overline{B} + B) + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{補元律、同一律}$$

和積形から積和形に変形する

$F = (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C)$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・和積形

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C$ 　分配律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B}$ 　補元律、同一律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ 　交換律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C\,(\overline{B} + B) + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ 　補元律、同一律

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$ 　分配律、交換律

和積形から積和形に変形する

$$
\begin{aligned}
F &= (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{和積形} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{交換律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C\,(\overline{B} + B) + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{分配律、交換律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,(1 + C) + (\overline{A} + 1)\,B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{分配律}
\end{aligned}
$$

和積形から積和形に変形する

$$F = (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C) \cdots\cdots\cdots\cdots\text{和積形}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C \qquad \text{分配律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} \qquad \text{補元律、同一律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{交換律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C\,(\overline{B} + B) + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{補元律、同一律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{分配律、交換律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,(1 + C) + (\overline{A} + 1)\,B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{分配律}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,1 + 1\,B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \qquad \text{支配律}$$

和積形から積和形に変形する

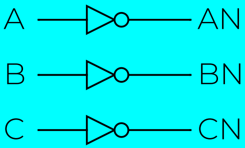
$$
\begin{aligned}
F &= (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C) \cdots\cdots\cdots\cdots && \text{和積形} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,\overline{B} + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} + \overline{C}\,C && \text{分配律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{C}\,\overline{B} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{交換律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,C\,(\overline{B} + B) + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{補元律、同一律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,C + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{分配律、交換律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,(1 + C) + (\overline{A} + 1)\,B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{分配律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,1 + 1\,B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{支配律} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} && \text{同一律}
\end{aligned}
$$

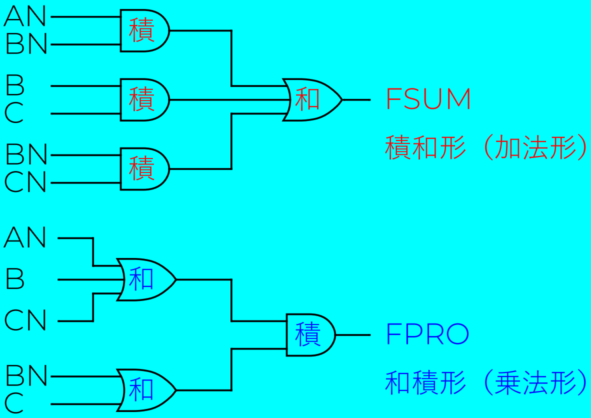
$$F = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{積和形}$$

論理式の積和形と和積形

$$\mathrm{FSUM} = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C + \overline{B}\,\overline{C}$$ 積和形（加法形）

$$\mathrm{FPRO} = (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{B} + C)$$ 和積形（乗法形）





積和形と和積形の回路 (Verilog HDL)

$\mathrm{FSUM} = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}\,\mathrm{C} + \overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}$ 積和形（加法形）

$\mathrm{FPRO} = (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}})\,(\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C})$ 和積形（乗法形）

```
‘timescale 1ns/1ns

module sum_prod_ex3 (A, B, C, FSUM, FPRO);
    input  A, B, C;
    output FSUM, FPRO;

    assign FSUM =  ~A & ~B |
                    B &  C |
                   ~B & ~C;   // sum of products

    assign FPRO = (~A |  B | ~C) &
                  (~B |  C);  // product of sums
endmodule
```

sum_prod_ex3.v

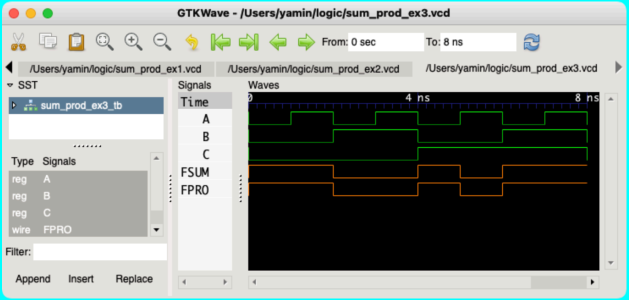
積和形と和積形の回路 (テストベンチ)

```
`timescale 1ns/1ns
module sum_prod_ex3_tb;
    reg  A, B, C;
    wire FSUM, FPRO;
    sum_prod_ex3 i0 (A, B, C, FSUM, FPRO);
    initial begin
        #0 A = 0; B = 0; C = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 A = ~A;
    always #2 B = ~B;
    always #4 C = ~C;
    initial begin
        $dumpfile ("sum_prod_ex3.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

sum_prod_ex3_tb.v

積和形と和積形の回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o sum_prod_ex3 \
  sum_prod_ex3_tb.v sum_prod_ex3.v
% vvp sum_prod_ex3
% gtkwave sum_prod_ex3.vcd
```



FPRO (和積形) === FSUM (積和形)

論理式の積和 (加法) 形と和積 (乗法) 形

まとめ

- 最小項
- 最大項
- 最小項の論理和 = 積和標準形 = 加法標準形
- 最大項の論理積 = 和積標準形 = 乗法標準形
- 論理式の積和形
- 論理式の和積形
- 積和形から和積形に変形
- 和積形から積和形に変形

課題 IV (100 点)

次の論理式を積和形から和積形に変形して下さい。

$$\mathrm{F\_SUM} = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{F\_PRO} = (\square + \square) \cdot (\square + \square) \cdot (\square + \square)$$

ヒント: $\overline{\mathrm{F\_SUM}}$ の式のなかに、$B \cdot C \Rightarrow B \cdot C \cdot (\overline{D} + D)$。
さらに、二つの論理式 F_SUM と F_PRO を Verilog HDL で実装しシミュレーションして下さい。

モジュール名は product_of_sums にすること。
テストベンチ product_of_sums_tb.v を使って下さい。

レポートの必須項目: (1) 論理式 F_PRO の導出過程、(2) 回路の Verilog HDL コード、(3) 波形と波形の説明。

課題 IV (100 点)

$$\mathrm{F\_SUM} = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{D}$$

$$\mathrm{F\_PRO} = (\square + \square) \cdot (\square + \square) \cdot (\square + \square)$$

```
`timescale 1ns/1ns

module product_of_sums (A, B, C, D, F_SUM, F_PRO);
    input  A, B, C, D;
    output F_SUM, F_PRO;

    assign F_SUM = ~A & ~C & D | ~B & ~C & D | ~B & ~D;
    assign F_PRO = (   |   ) & (   |   ) & (   |   );

endmodule
```

product_of_sums.v