論理回路入門（3）

ブール代数と完全系

李　亜民

2023 年 10 月 10 日 (火)

ブール代数と完全系

ポイント

- ブール代数の定理
- ド・モルガンの法則の理解と証明
- ブール代数の定理を用いた証明
- 完全系
  - AND と OR、NOT ゲート
  - NAND ゲートのみ
  - NOR ゲートのみ
- NAND ゲートのみで回路を構成
- NOR ゲートのみで回路を構成

1. AND (アンド)
   論理積 (かつ)　　(Verilog HDL の表現)
   『例』 $F = A \cdot B = A \quad B$　　`(F = A & B)`

$0 \cdot 0 = 0$　偽
$0 \cdot 1 = 0$　偽
$1 \cdot 0 = 0$　偽
$1 \cdot 1 = 1$ ……………… 真　かつ　真 ＝ 真

論理積は、入力値がすべて 1 のときに 1 を出力する。
それ以外の入力値のときは 0 を出力する。

復習: 基本的な論理演算 2. OR

2. OR (オア)
論理和 (または)
『例』 $F = A + B$

(Verilog HDL の表現)
(F = A | B)

$0 + 0 = 0$ ………………	偽 または 偽 ＝ 偽
$0 + 1 = 1$	真
$1 + 0 = 1$	真
$1 + 1 = 1$	真

論理和は、入力値がすべて 0 のときに 0 を出力する。
それ以外の入力値のときは 1 を出力する。

復習: 基本的な論理演算 3. NOT

3. NOT (ノット)
否定
『例』 $F = \overline{A}$

(Verilog HDL の表現)
(F = ~A)

$\overline{0} = 1$ ……………………… 偽の否定 = 真
$\overline{1} = 0$ ……………………… 真の否定 = 偽

論理否定は、入力された値が 0 なら 1 に、
1 なら 0 に反転する。

ブール代数

ブール代数 (Boolean Algebra) とは、ジョージ・ブールが 19 世紀中頃に考案した代数系の一つである。

ブール代数と集合論と命題論理の関係

集合論		命題論理		ブール代数		Verilog HDL
積集合	$A \cap B$	連言	$A \wedge B$	論理積 (AND)	$A \cdot B$	A & B
和集合	$A \cup B$	選言	$A \vee B$	論理和 (OR)	$A + B$	A | B
補集合	A^c	否定	$\neg A$	否定 (NOT)	$\overline{A}$	~A
全体集合	U	真	1 または T	論理 1	1	1
空集合	$\varnothing$	偽	0 または F	論理 0	0	0

ブール代数の定理

1. $A \cdot A = A$ …………………………冪等律
2. $A + A = A$ …………………………冪等律
3. $A \cdot B = B \cdot A$ …………………………交換律
4. $A + B = B + A$ …………………………交換律
5. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ……………結合律
6. $(A + B) + C = A + (B + C)$ ……………結合律
7. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ ………分配律
8. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ ………分配律
9. $A \cdot (A + B) = A$ …………………………吸収律
10. $A + (A \cdot B) = A$ …………………………吸収律

ブール代数の定理

11. $A \cdot 0 = 0$ ……………………支配律
12. $A + 1 = 1$ ……………………支配律
13. $A \cdot 1 = A$ ……………………同一律
14. $A + 0 = A$ ……………………同一律
15. $A \cdot \overline{A} = 0$ ……………………補元律
16. $A + \overline{A} = 1$ ……………………補元律
17. $\overline{\overline{A}} = A$ ……………………対合律

18. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ……………ド・モルガンの法則
19. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ……………ド・モルガンの法則

ブール代数の定理の証明

すべてのブール代数の定理

は真理値表で証明できる。

ブール代数の定理の証明（例）

証明: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ ・・・・・・・・・分配律

入力			左辺		右辺		
A	B	C	$(B + C)$	$A \cdot (B + C)$	$(A \cdot B)$	$(A \cdot C)$	$(A \cdot B) + (A \cdot C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

入力の全てのパターンに対する左辺と右辺は出力が等しいであるため、分配律は成り立つ。

ブール代数の定理の証明（例）

証明: $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ ・・・・・・・・分配律

入力			左辺		右辺		
A	B	C	$(B \cdot C)$	$A+(B \cdot C)$	$(A+B)$	$(A+C)$	$(A+B) \cdot (A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

入力の全てのパターンに対する左辺と右辺は出力が等しいであるため、分配律は成り立つ。

分配律の回路 (Verilog HDL)

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Equ. 1}$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Equ. 2}$$

```
`timescale 1ns/1ns

module distributive_law (A, B, C, P, Q, S, T);
    input  A, B, C;
    output P, Q, S, T;

    assign P =  A & (B | C);       // Equ. 1's left  side
    assign Q = (A & B) | (A & C); // Equ. 1's right side

    assign S =  A | (B & C);       // Equ. 2's left  side
    assign T = (A | B) & (A | C); // Equ. 2's right side

endmodule
```

distributive_law.v

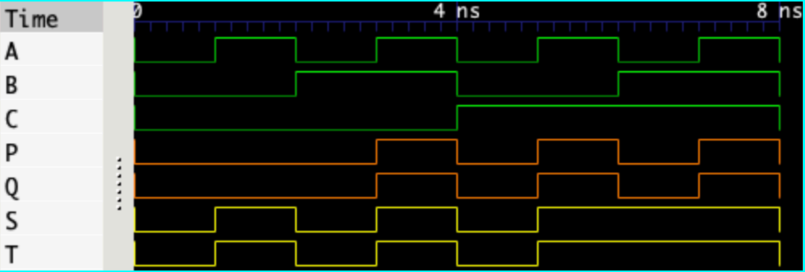
分配律の回路 (テストベンチ)

```
‘timescale 1ns/1ns
module distributive_law_tb;
    reg  A, B, C;
    wire P, Q, S, T;
    distributive_law i0 (A, B, C, P, Q, S, T);
    initial begin
        #0 A = 0; B = 0; C = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 A = ~A;
    always #2 B = ~B;
    always #4 C = ~C;
    initial begin
        $dumpfile ("distributive_law.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

distributive_law_tb.v

分配律の回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o distributive_law \
  distributive_law_tb.v distributive_law.v
% ./distributive_law
% gtkwave distributive_law.vcd
```



$P = A \cdot (B + C) \;===\; (A \cdot B) + (A \cdot C) = Q$ 分配律

$S = A + (B \cdot C) \;===\; (A + B) \cdot (A + C) = T$ 分配律

ド・モルガンの法則を理解

ド・モルガンの法則 1: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

『例』命題:

$F =$ 単位修得　　　$\overline{F} =$ 単位非修得

$A =$ 試験の成績は６０点以上　　　$\overline{A} =$ 試験の成績は６０点以下

$B =$ レポートを提出する　　　$\overline{B} =$ レポート未提出

$$F = A \cdot B \quad \Rightarrow$$

単位修得 ＝ 試験の成績は６０点以上　かつ　レポートを提出する

$$\overline{F} = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \Rightarrow$$

単位非修得 ＝ 試験の成績は６０点以下 または レポート未提出

ド・モルガンの法則を理解

ド・モルガンの法則 2: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

『例』命題:

$F =$ 単位修得 $\qquad \overline{F} =$ 単位非修得

$A =$ 試験の成績は６０点以上 $\qquad \overline{A} =$ 試験の成績は６０点以下

$B =$ レポートを提出する $\qquad \overline{B} =$ レポート未提出

$$F = A + B \quad \Rightarrow$$

単位修得 ＝ 試験の成績は６０点以上 または レポートを提出する

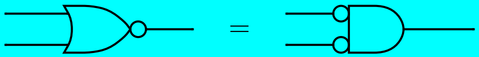
$$\overline{F} = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \Rightarrow$$

単位非修得 ＝ 試験の成績は６０点以下 かつ レポート未提出

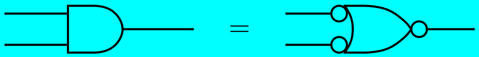
ド・モルガンの法則の応用

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

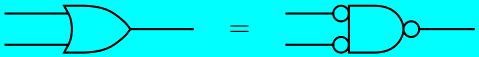
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$



- $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$



- $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



ド・モルガンの法則の証明

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

入力		左辺		右辺		
A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

↑ A AND B なので、A と B が 1 の時に 1 を出力する

↑ A AND B の否定なので、左の A AND B の結果の逆を出力する

↑ 左で求めた A の否定、B の否定を用いて、$\overline{A}$ OR $\overline{B}$ を出力する

入力の全てのパターンに対する左辺と右辺は出力が等しいであるため、ド・モルガンの法則は成り立つ。

ド・モルガンの法則の証明

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

入力		左辺		右辺		
A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

↑ A OR B なので、A, B いずれかが 1 の時に 1 を出力する

↑ A OR B の否定なので、左の A OR B の結果の逆を出力する

↑ 左で求めた A の否定、B の否定を用いて、$\overline{A}$ AND $\overline{B}$ を出力する

入力の全てのパターンに対する左辺と右辺は出力が等しいであるため、ド・モルガンの法則は成り立つ。

ド・モルガンの法則 (Verilog HDL)

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Equ. 1}$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Equ. 2}$$

```
`timescale 1ns/1ns

module de_morgan_law (A, B, P, Q, S, T);
    input  A, B;
    output P, Q, S, T;

    assign P = ~(A & B); // Equ. 1's left  side
    assign Q =  ~A | ~B; // Equ. 1's right side

    assign S = ~(A | B); // Equ. 2's left  side
    assign T =  ~A & ~B; // Equ. 2's right side

endmodule
```

de_morgan_law.v

ド・モルガンの法則 (テストベンチ)

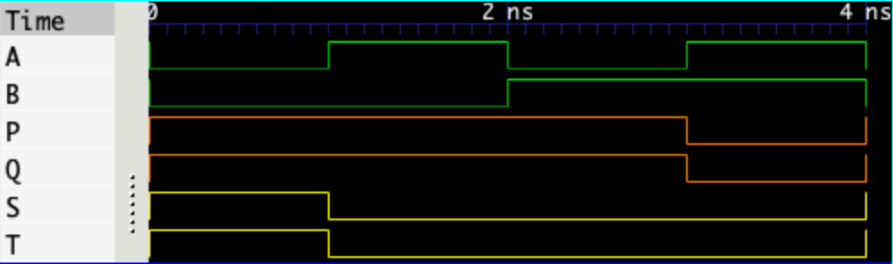
```
‘timescale 1ns/1ns

module de_morgan_law_tb;
    reg  A, B;
    wire P, Q, S, T;
    de_morgan_law i0 (A, B, P, Q, S, T);
    initial begin
        #0 A = 0; B = 0;
        #4 $finish;
    end
    always #1 A = ~A;
    always #2 B = ~B;
    initial begin
        $dumpfile ("de_morgan_law.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

de_morgan_law_tb.v

ド・モルガンの法則 (波形)

```
% iverilog -Wall -o de_morgan_law \
  de_morgan_law_tb.v de_morgan_law.v
% ./de_morgan_law
% gtkwave de_morgan_law.vcd
```



$P = \overline{A \cdot B} === \overline{A} + \overline{B} = Q$ ド・モルガンの法則

$S = \overline{A + B} === \overline{A} \cdot \overline{B} = T$ ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則の例

$$F = X + Y \cdot \overline{Z}$$

$$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot \overline{Z}}$$

ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = ?$

ド・モルガンの法則の例

$$F = X + Y \cdot \overline{Z}$$

$$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot \overline{Z}}$$

ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y \cdot \overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = ?$

ド・モルガンの法則の例

$$F = X + Y \cdot \overline{Z}$$

$$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot \overline{Z}}$$

ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y \cdot \overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{\overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

ド・モルガンの法則の例

$$F = X + Y \cdot \overline{Z}$$

$$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot \overline{Z}}$$

ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y \cdot \overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{\overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y} + Z)$$

ド・モルガンの法則の例

$$F = X + Y \cdot \overline{Z}$$

$$\overline{F} = \overline{X + Y \cdot \overline{Z}}$$

ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y \cdot \overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = ?$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{\overline{Z}})$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$$= \overline{X} \cdot (\overline{Y} + Z)$$

$$= \overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Z$$

ド・モルガンの法則の拡張

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ……………ド・モルガンの法則
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ……………ド・モルガンの法則
- $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
- $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
- $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$
- $\overline{A + B + C + D} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$
- $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E}$
- $\overline{A + B + C + D + E} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}$
- … …
- … …

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$A \cdot ((B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)) = A$$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$A \cdot ((B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)) = A$$

$(B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) = 1$ を証明すればよい、とあたりを付ける

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$A \cdot ((B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)) = A$$

$(B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) = 1$ を証明すればよい、とあたりを付ける

$$(B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)$$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$A \cdot ((B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)) = A$$

$(B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) = 1$ を証明すればよい、とあたりを付ける

$$\begin{aligned} & (B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) \\ = \ & (B \cdot \overline{C}) + (\overline{\overline{B} \cdot \overline{C}}) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ド・モルガンの法則より右の項を変形

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$((A \cdot B) \cdot \overline{C}) + (A \cdot (\overline{B} + C)) = A$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$A \cdot ((B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C)) = A$$

$(B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) = 1$ を証明すればよい、とあたりを付ける

$$
\begin{aligned}
& (B \cdot \overline{C}) + (\overline{B} + C) \\
= \; & (B \cdot \overline{C}) + (\overline{\overline{\overline{B}} \cdot \overline{C}}) \quad \Leftarrow \text{ド・モルガンの法則より右の項を変形} \\
= \; & (B \cdot \overline{C}) + (\overline{B \cdot \overline{C}})
\end{aligned}
$$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $((\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \overline{\mathrm{C}}) + (\mathrm{A} \cdot (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C})) = \mathrm{A}$

右辺が A なので、左辺を A でくくる

$$\mathrm{A} \cdot ((\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) + (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C})) = \mathrm{A}$$

$(\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) + (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C}) = 1$ を証明すればよい、とあたりを付ける

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) + (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C}) \\
= \;& (\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) + \overline{\overline{\overline{\mathrm{B}}} \cdot \overline{\mathrm{C}}} && \Leftarrow \text{ド・モルガンの法則より右の項を変形} \\
= \;& (\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) + \overline{\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}} && \Leftarrow (\mathrm{B} \cdot \overline{\mathrm{C}}) = \mathrm{D} \text{ とするならば、} (\mathrm{D} + \overline{\mathrm{D}}) \text{ となる} \\
= \;& 1
\end{aligned}$$

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺　$X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺　$X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

$= \; X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot (\overline{Z} + Z)$　　$\Leftarrow Z + \overline{Z} = 1$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot (\overline{Z} + Z)$ $\Leftarrow Z + \overline{Z} = 1$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 分配律

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot (\overline{Z} + Z)$ $\Leftarrow Z + \overline{Z} = 1$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 分配律

$= X \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 交換律

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot (\overline{Z} + Z)$ $\Leftarrow Z + \overline{Z} = 1$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 分配律

$= X \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 交換律

$= X \cdot \overline{Z} \cdot (1 + Y) + Y \cdot Z \cdot (1 + X)$ $\Leftarrow$ 分配律

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y = X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$

左辺の $X \cdot Y$ をいじって消す方針

左辺 $X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot (\overline{Z} + Z)$ $\Leftarrow Z + \overline{Z} = 1$

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 分配律

$= X \cdot \overline{Z} + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z$ $\Leftarrow$ 交換律

$= X \cdot \overline{Z} \cdot (1 + Y) + Y \cdot Z \cdot (1 + X)$ $\Leftarrow$ 分配律

$= X \cdot \overline{Z} + Y \cdot Z$ 右辺 $\Leftarrow 1 + Y = 1;\ 1 + X = 1$

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$A + \overline{A} \cdot B = A + B$

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$A + \overline{A} \cdot B = A + B$

左辺　$A + \overline{A} \cdot B = A \cdot 1 + \overline{A} \cdot B$　　同一律

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

左辺 $A + \overline{A} \cdot B = A \cdot 1 + \overline{A} \cdot B$ 同一律

$= A \cdot (\overline{B} + B) + \overline{A} \cdot B$ 補元律

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$

左辺	$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} \cdot 1 + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}$	同一律
	$= \mathrm{A} \cdot (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}) + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}$	補元律
	$= \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}$	分配律

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$A + \overline{A} \cdot B = A + B$

左辺　$A + \overline{A} \cdot B = A \cdot 1 + \overline{A} \cdot B$　同一律

$= A \cdot (\overline{B} + B) + \overline{A} \cdot B$　補元律

$= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$　分配律

$= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$　冪等律

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$A + \overline{A} \cdot B = A + B$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}\quad A + \overline{A} \cdot B &= A \cdot 1 + \overline{A} \cdot B && \text{同一律} \\
&= A \cdot (\overline{B} + B) + \overline{A} \cdot B && \text{補元律} \\
&= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B && \text{分配律} \\
&= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B + \overline{A} \cdot B && \text{冪等律} \\
&= A \cdot (\overline{B} + B) + (A + \overline{A}) \cdot B && \text{分配律}
\end{aligned}
$$

ブール代数の定理を用いた証明

証明 $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

左辺 $A + \overline{A} \cdot B = A \cdot 1 + \overline{A} \cdot B$ 同一律

$= A \cdot (\overline{B} + B) + \overline{A} \cdot B$ 補元律

$= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$ 分配律

$= A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B + \overline{A} \cdot B$ 冪等律

$= A \cdot (\overline{B} + B) + (A + \overline{A}) \cdot B$ 分配律

$= A \cdot 1 + 1 \cdot B$ 補元律

ブール代数の定理を用いた証明

証明　$\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}\quad \mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} &= \mathrm{A} \cdot 1 + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} && \text{同一律} \\
&= \mathrm{A} \cdot (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}) + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} && \text{補元律} \\
&= \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} && \text{分配律} \\
&= \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B} && \text{冪等律} \\
&= \mathrm{A} \cdot (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{B}) + (\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}) \cdot \mathrm{B} && \text{分配律} \\
&= \mathrm{A} \cdot 1 + 1 \cdot \mathrm{B} && \text{補元律} \\
&= \mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \text{右辺} && \text{同一律}
\end{aligned}
$$

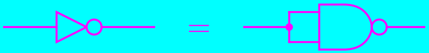
完全系

- AND と OR、NOT ゲートがあれば、どんな論理回路でも設計できる。
- このようにどんな論理回路でも設計できるゲートの組み合わせを完全系と言う。
- 面白いことに、これら 3 つのゲートではなく、たった 1 つのゲートで完全系ができる。
- NAND ゲートがあれば、どんな論理回路でも設計できる。
- NOR　ゲートがあれば、どんな論理回路でも設計できる。
- このとき、NAND（もしくは NOR）は完全系も言う。

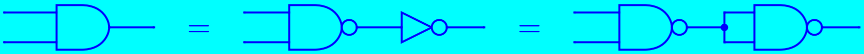
NANDゲートのみで回路を構成する

任意の組合せ回路は NAND ゲートを用いて実現できる。

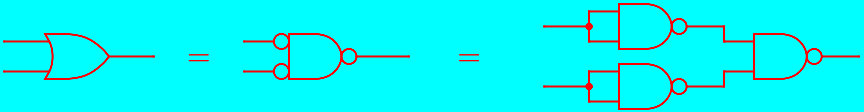
1. NOT: $\overline{A} = \overline{A \cdot A}$



2. AND: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$

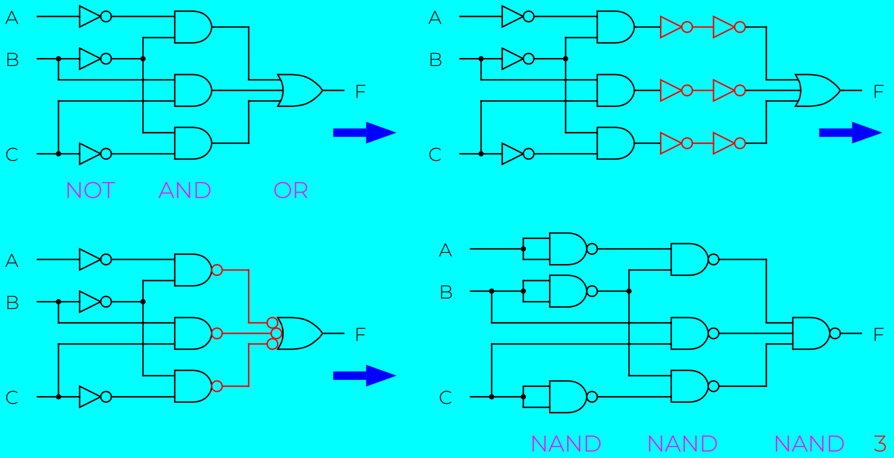


3. OR: $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



NANDゲートのみで回路を構成する

任意の組合せ回路はNANDゲートを用いて実現できる。



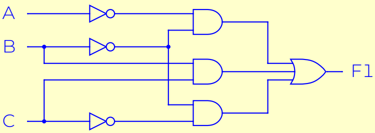
NANDのみで回路 (Verilog HDL)

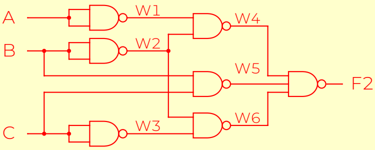
```
`timescale 1ns/1ns
module nand_only (A, B, C, F1, F2);
    input  A, B, C;
    output F1, F2;

    wire   W1, W2, W3, W4, W5, W6;

    assign F1 = ~A & ~B | B & C | ~B & ~C;

    nand i1 (W1,  A,  A);
    nand i2 (W2,  B,  B);
    nand i3 (W3,  C,  C);
    nand i4 (W4, W1, W2);
    nand i5 (W5,  B,  C);
    nand i6 (W6, W2, W3);
    nand i7 (F2, W4, W5, W6);
endmodule
```





nand_only.v

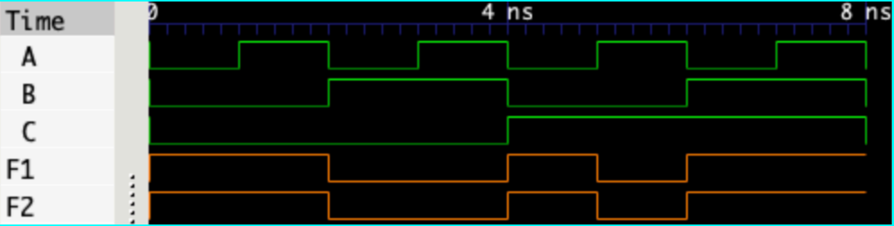
NAND のみで回路 (テストベンチ)

```
‘timescale 1ns/1ns
module nand_only_tb;
    reg  A, B, C;
    wire F1, F2;
    nand_only i0 (A, B, C, F1, F2);
    initial begin
        #0 A = 0; B = 0; C = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 A = ~A;
    always #2 B = ~B;
    always #4 C = ~C;
    initial begin
        $dumpfile ("nand_only.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

nand_only_tb.v

NAND のみで回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o nand_only \
  nand_only_tb.v nand_only.v
% ./nand_only
% gtkwave nand_only.vcd
```

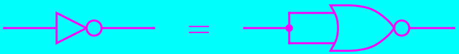


F1 === F2

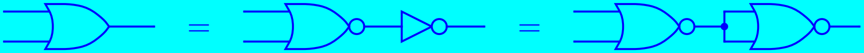
NOR　ゲートのみで回路を構成する

任意の組合せ回路は NOR ゲートを用いて実現できる。

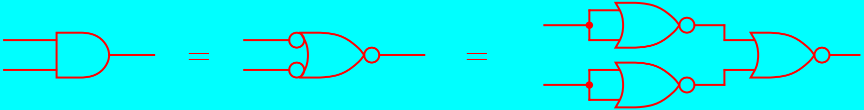
1. NOT: $\overline{A} = \overline{A + A}$



2. OR: $A + B = \overline{\overline{A + B}}$

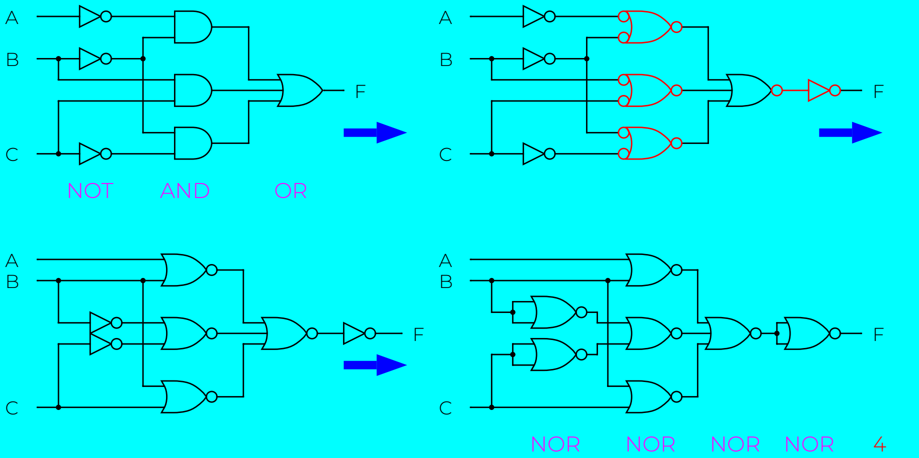


3. AND: $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$



NOR　ゲートのみで回路を構成する

任意の組合せ回路は NOR ゲートを用いて実現できる。



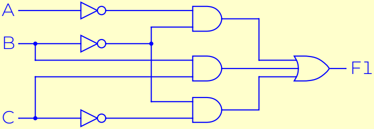
NORのみで回路 (Verilog HDL)

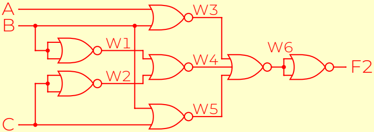
```
‘timescale 1ns/1ns
module nor_only (A, B, C, F1, F2);
    input  A, B, C;
    output F1, F2;

    wire   W1, W2, W3, W4, W5, W6;

    assign F1 = ~A & ~B | B & C | ~B & ~C;

    nor i1 (W1,  B,  B);
    nor i2 (W2,  C,  C);
    nor i3 (W3,  A,  B);
    nor i4 (W4, W1, W2);
    nor i5 (W5,  B,  C);
    nor i6 (W6, W3, W4, W5);
    nor i7 (F2, W6, W6);
endmodule
```





nor_only.v

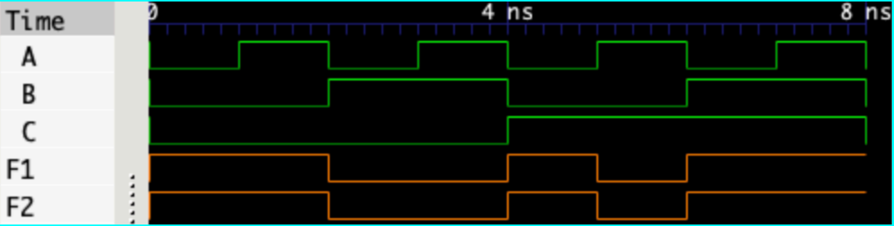
NOR のみで回路 (テストベンチ)

```
`timescale 1ns/1ns
module nor_only_tb;
    reg  A, B, C;
    wire F1, F2;
    nor_only i0 (A, B, C, F1, F2);
    initial begin
        #0 A = 0; B = 0; C = 0;
        #8 $finish;
    end
    always #1 A = ~A;
    always #2 B = ~B;
    always #4 C = ~C;
    initial begin
        $dumpfile ("nor_only.vcd");
        $dumpvars;
    end
endmodule
```

nor_only_tb.v

NORのみで回路 (波形)

```
% iverilog -Wall -o nor_only \
  nor_only_tb.v nor_only.v
% ./nor_only
% gtkwave nor_only.vcd
```



F1 === F2

ブール代数と完全系

まとめ

- ブール代数の定理
- ド・モルガンの法則の理解と証明
- ブール代数の定理を用いた証明
- 完全系
  - AND と OR、NOT ゲート
  - NAND ゲートのみ
  - NOR ゲートのみ
- NAND ゲートのみで回路を構成
- NOR ゲートのみで回路を構成

課題 III (100 点)

問題１： 次式をブール代数の定理で証明して下さい。

(1) $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

(2) $A \cdot B + \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot B + B \cdot C$

課題 III (100 点)

問題２： 次式を真理値表で証明して下さい。

(1) $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ ··························Equ. 1

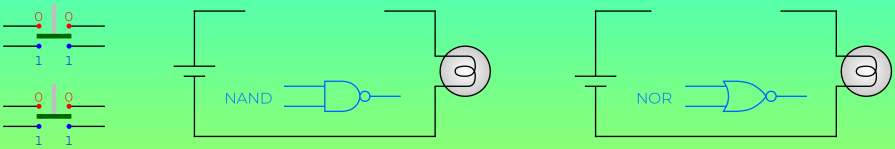
(2) $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ··························Equ. 2

さらに、Verilog HDL コードを書いて、シミュレーションして下さい (P18 - P22 を参照)。

モジュール名：demorganlaw
テストベンチ：demorganlaw_tb.v

発展：自由練習

分かりやすいために、NAND ゲートと NOR ゲートの電球を点灯させる回路を描画して下さい。



真理値表で確認して下さい。ヒント:

(1) NAND: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ド・モルガンの法則

(2) NOR: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ド・モルガンの法則